



**Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

# 1

1.1 Si consideri il sistema differenziale non lineare del *primo ordine* nel piano in *coordinate polari*:

$$\begin{cases} \dot{v} &= -\sin \theta - v^2 \\ \dot{\theta} &= -\frac{\cos \theta}{v} + v \end{cases}$$

Studiare in dettaglio equilibri e stabilità.

1.2 Consideriamo gli equilibri dei sistemi meccanici Lagrangiani conservativi.

(i) È possibile mediante il primo metodo spettrale di Lyapunov verificare la stabilità di un equilibrio?

È possibile mediante il primo metodo spettrale di Lyapunov verificare la instabilità di un equilibrio?

(ii) Dimostrare il THND nel caso  $N = 1$ -dimensionale,  $q \in \mathbb{R}^1$ , con matrice cinetica  $a(q) \equiv 1$ .

(iii) Facoltativo (e alternativo a (ii)): Dimostrare il THND in tutta generalità e per qualunque dim.  $N$ .

# 1.3

Dimostrare che un sistema dinamico  $\dot{x} = X(x)$  che ammette un equilibrio  $x^*$  asintoticamente stabile non può avere integrali primi  $\psi(x)$  indipendenti dal tempo non banali, cioè diversi dalle funzioni costanti.

# 2

2.1 Nel piano  $Oxy$  con  $y$  verticale ascendente di un riferimento  $Oxyz$  si consideri il sistema costituito da due aste  $OA$  e  $BC$  omogenee di massa  $m$  e lunghezza  $l$ . L'asta  $OA$  è vincolata nell'origine nel suo estremo  $O$  e l'asta  $BC$  è vincolata con il suo punto medio nell'estremo  $A$ . Si riferisca la posizione dell'asta  $OA$  all'angolo  $\theta$  tra la direzione negativa dell'asse verticale  $y$  e il segmento  $OA$ , valutato positivamente in senso *antiorario* e la posizione dell'asta  $BC$  all'angolo  $\varphi$  tra la direzione del segmento  $OA$  e la direzione del segmento  $BC$  valutato positivamente in senso *orario*. Infine, tra l'origine  $O$  e l'estremo  $C$  è tesa una molla di costante elastica  $h$ .

- Si scriva l'energia potenziale delle forze agenti, si determinino le configurazioni di equilibrio e si studi la stabilità degli stessi.
- si scriva l'energia cinetica del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile
- Si supponga ora che l'asta  $BC$  abbia massa *nulla* e che il riferimento  $Oxyz$  ruoti con velocità angolare  $\omega$  costante diretta lungo l'asse verticale  $y$  rispetto agli spazi inerziali. Si consideri la descrizione del moto del sistema nel riferimento rotante. Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo (senza studiare la stabilità).

2.2 Introdurre per il problema a 2-corpi Newtoniano  $P$  e  $S$ , di masse  $m_P$  e  $m_S$ , la descrizione di  $P$  nel sistema sistema della *massa ridotta*.

2.3 Dimostrare che la mappa  $(x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2N})$

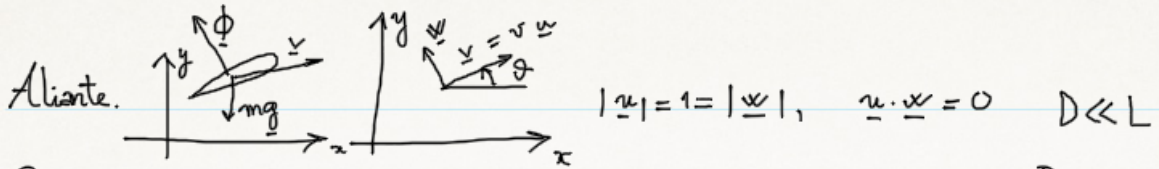
$$\pi : (C^\infty(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R}), \{\cdot, \cdot\}) \longrightarrow (C^\infty(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R}^{2N}), [\cdot, \cdot])$$

$$H(x) \longmapsto \mathbb{E}\nabla H(x)$$

è un anti-morfismo d'algebra. Cioè, il prodotto dei trasformati è il trasformato del prodotto, con il segno meno.

SOLUZIONI

Soluzione 1.1: Porre nel seguente esempio tutte le costanti uguali ad uno.



Per semplicità,  $m = 1$ . Dinamica del centro di massa:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g \sin \vartheta - D v^2 \\ v \dot{\vartheta} = g \cos \vartheta + L v^2 \end{cases}$$

equilibri (moto stazionario):

$$\begin{cases} \sin \vartheta = -\frac{D}{g} v^2 \\ \cos \vartheta = \frac{L}{g} v^2 \end{cases} \quad v^2 = \frac{g}{\sqrt{D^2 + L^2}} = v_E^2 \quad \begin{cases} \dot{v} = -g \sin \vartheta - D v^2 \\ \dot{\vartheta} = -\frac{g \cos \vartheta}{v} + L v \end{cases}$$

$$\vartheta_E = \arcsin\left(-\frac{D}{g} v_E^2\right) \lesssim 0$$

Linearizzo attorno a  $(v_E, \vartheta_E)$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2Dv_E & -g \cos \vartheta_E \\ \frac{g \cos \vartheta_E}{v_E} + L & \frac{g \sin \vartheta_E}{v_E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - v_E \\ \vartheta - \vartheta_E \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = A(z - z_E), \quad A = \begin{pmatrix} -2Dv_E & -g \frac{L}{g} v_E^2 \\ \frac{g}{v_E} \frac{L}{g} v_E^2 + L & \frac{g}{v_E} \left(-\frac{D}{g} v_E^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2Dv_E & -Lv_E^2 \\ 2L & -Dv_E \end{pmatrix}$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} -2Dv_E - \lambda & -Lv_E^2 \\ 2L & -Dv_E - \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \lambda(D + 2D)v_E + 2L^2 v_E^2 + 2D^2 v_E^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3Dv_E \lambda + 2(L^2 + D^2)v_E^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3Dv_E \pm \sqrt{9D^2 v_E^2 - 8(L^2 + D^2)v_E^2}}{2}$$

$$= \frac{-3Dv_E \pm \sqrt{D^2 v_E^2 - 8L^2 v_E^2}}{2}$$

Si osserva che per ogni scelta di  $D$  e  $L$  positivi:

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0 : \text{Stabilità Asintotica}$$

1.2: Il primo metodo (spettrale) è efficace per i sistemi conservativi solamente nella verifica di eventuale instabilità. Nel caso di  $U''(0) > 0$ , è invece il teorema di L-D che mostra la stabilità. In tal caso infatti la parte reale dello spettro è nulla. Esempio 1-dim:

$$\ddot{q} = -U'(q) \quad \text{e si supponga: } U'(0) = 0$$

al primo ordine:

$$\text{Non lineare: } \begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -U'(q) \end{cases}$$

linearizzato attorno a  $(q^* = 0, v^* = 0)$ :

$$\text{Linearizzato attorno a } (q^*, v^*) = (0, 0): \begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -U''(0)q \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}$$

Lo spettro di  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(0) & 0 \end{pmatrix}$  è:  $\lambda^2 + U''(0) = 0$ , pertanto, se  $q^* = 0$  è stabile con la funzione di Lyap. energia totale (Lagrange-Dirichlet) si ha  $Re(\lambda_{1,2}) = 0$ : a priori non si può dire nulla sulla stabilità.

Nel caso  $U''(0) < 0$  si hanno autovalori reali di segno discorde  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-U''(0)}$ : instabile.

(Facoltativo) Il caso a dimensione  $N > 1$  si studia con la stessa tecnica delle piccole oscillazioni, precisamente considerando le tre trasformazioni lineari in  $\mathbb{R}^N$  diagonalizzanti le forme quadratiche associate a  $a(0)$  e a  $\nabla^2 U(0)$ , la sola differenza ora è che  $\nabla^2 U(0)$  **non** è def. pos., pertanto alla fine si ottengono delle equazioni linearizzate del tipo

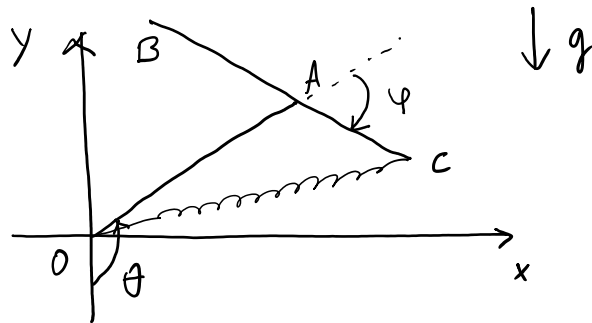
$$\ddot{\mathbf{q}}^\ell = -\text{sgn}(\ell) \omega_\ell^2 \mathbf{q}^\ell, \quad \text{sgn}(\ell) = \pm 1 .$$

Se  $\text{sgn}(\ell) = +1$  allora quel modo normale oscilla armonicamente,

se  $\text{sgn}(\ell) = -1$  quel modo normale evolve fuggendo esponenzialmente da  $\mathbf{q}^\ell = 0$ .

## Correzione 1° Appello F.M.

martedì 6 giugno 2017 15:11



$$U = U^g + U^el$$

$$U^g = mg \frac{l}{2} \cos(\pi - \theta) + mg l \cos(\pi - \varphi) \\ = -\frac{3}{2} mgl \cos \theta$$

$$U^el = \frac{1}{2} k |OC|^2 = \frac{1}{2} \left( l^2 + l^2 - 2 \frac{l}{2} l \cos(\pi - \varphi) \right) = \frac{1}{2} l^2 \cos \varphi$$

Equilibri:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{3}{2} mgl \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} l^2 \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad P_{eq} = (\theta, \varphi)$$

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, \pi), \quad P_3 = (\pi, 0), \quad P_4 = (\pi, \pi)$$

Stabilità

$$H_U = \begin{pmatrix} U_{\theta\theta} & U_{\theta\varphi} \\ U_{\varphi\theta} & U_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} mgl \cos \theta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} l^2 \cos \varphi \end{pmatrix}$$

applicando THND si vede che  $P_2$  è stabile, gli altri sono instabili.

Energia cinetica.

$$T = T_{OA} + T_{BC} \quad T_{OA} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2$$

$$T_{BC} = \frac{m}{2} v_A^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot I_G \omega \quad v_A = l \dot{\theta} \quad I_G = \frac{ml^2}{12}$$

$$\omega = \omega^e + \omega^r \quad \text{con } \omega^e = \dot{\theta} \hat{z}, \quad \omega^r = -\dot{\varphi} \hat{z} \quad \text{quindi}$$

$$T_{BC} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} (\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2$$

Corrigion pag 2

martedì 6 giugno 2017 15:21

$$T = T_{OA} + T_{BC} = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} (\dot{\theta} + \dot{\varphi} - 2\dot{\theta}\dot{\varphi})^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{17}{12} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} ml^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \frac{2ml^2}{12} \dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2} A(\dot{q}) \dot{q} \cdot \dot{q} \quad A = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{17}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Frequenza piccole oscillazioni: sono le sol. di

$$\det(H_U(P_2) - \omega^2 A) = 0$$

Equilibri nel sistema rotante ( $m_{BC} = 0$ ).

Si vede subito che  $Q^{cor} = 0$  per  $\omega, v_p, \delta \theta$  sono correlati.

Quindi  $U = U^g + U^el + U^cf$

$$U^{cf} = -\frac{\omega^2}{2} I_0^y = -\frac{\omega^2}{2} \frac{ml^2}{3} \sin^2 \theta$$

$$U = -\frac{3}{2} mgl \cos \theta + \frac{1}{2} l^2 \cos \varphi - \frac{\omega^2}{2} \frac{ml^2}{3} \sin^2 \theta$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{3}{2} mgl \sin \theta - \omega^2 \frac{ml^2}{3} \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} l^2 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ml \sin \theta \left( \frac{3}{2} g - \omega^2 \frac{l}{3} \cos \theta \right) = 0 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

oltre agli equilibri precedenti, vi sono quelli dati da

$$\cos \theta = \frac{3g}{2\omega^2 l} \leq 1. \quad \theta = \pm \arccos \left( \frac{3g}{2\omega^2 l} \right).$$

$$\cos\theta = \frac{g}{2\omega^2 l} \leq 1. \quad \theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{2\omega^2 l}\right).$$